Analisi 2 – Toolkit d'Esame

MVP Cheat Sheet

28 gennaio 2026

Indice

1 Serie di Funzioni e Convergenza

1.1 Serie di potenze

Forma generale

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Raggio di convergenza R:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad \text{o} \quad R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

Intervallo di convergenza: $(x_0 - R, x_0 + R)$ (studiare estremi a parte)

Serie geometrica di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} r(x)^n = \frac{1}{1 - r(x)} \quad \text{se } |r(x)| < 1$$

Insieme di convergenza: $\{x : |r(x)| < 1\}$.

Serie di Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Sviluppi notevoli (centrati in $x_0 = 0$):

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad (R = +\infty)$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \quad (R = +\infty)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \quad (R = +\infty)$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \quad (R = 1)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \quad (R = 1)$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots \quad (R = 1)$$

1.2 Convergenza uniforme

Criterio di Weierstrass (M-test)

Se $|f_n(x)| \leq M_n$ per ogni $x \in A$ e $\sum M_n$ converge, allora $\sum f_n(x)$ converge uniformemente su A.

Derivazione termine a termine

Se $\sum f_n$ converge puntualmente e $\sum f_n'$ converge uniformemente, allora:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$$

Integrazione termine a termine

Se $\sum f_n$ converge uniformemente su $[a, b]$:

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$$

Serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^n$

Insieme di convergenza: $\left|1 - \frac{1}{x}\right| < 1 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$
Somma: $S(x) = \frac{1}{1-(1-1/x)} = x$ per $x > \frac{1}{2}$
Convergenza uniforme su $[1, +\infty)$:

$$\sup_{x\geq 1} \left|1 - \frac{1}{x}\right|^n = \left|1 - \frac{1}{1}\right|^n = 0 \Rightarrow \text{SÌ uniforme}$$

Trucco per somme numeriche: Se $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1}$, derivando la geometrica otteniamo formule per serie numeriche.

2 Funzioni di Più Variabili

2.1 Gradiente e Hessiana

Gradiente

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Matrice Hessiana

$$\mathrm{H}f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

2.2 Classificazione punti critici (2D)

Test dell'Hessiana

Al punto critico (x_0, y_0) calcola:

$$\det(\mathrm{H}f) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$$
$$\text{traccia} = f_{xx} + f_{yy}$$

Classificazione:

- $\det(\mathrm{H}) > 0$ e $f_{xx} > 0$: **minimo locale**
- $\det(\mathrm{H}) > 0$ e $f_{xx} < 0$: **massimo locale**
- $\det(\mathrm{H}) < 0$: **punto di sella**
- $\det(\mathrm{H}) = 0$: **test inconclusivo**

Test inconclusivo

Se $\det(\mathrm{H}) = 0$, studia f su rette passanti per il punto critico:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

oppure bisettrici $x = x_0$ o $y = y_0$. Se trovi segni diversi $\to$ sella.

$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2 + 2$

Punti critici: $\nabla f = 0$

$$f_x = 4x^3 - 4(x-y) = 0$$
$$f_y = 4y^3 + 4(x-y) = 0$$

Somma: $x^3 + y^3 = 0 \Rightarrow x = -y$. Sostituendo: $4x^3 - 8x = 0 \Rightarrow x(x^2-2) = 0$.
Punti: $(0,0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
Hessiana in $(0,0)$**:**

$$\mathrm{H}f(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}, \quad \det = 16 - 16 = 0$$

Test inconclusivo! Studio su $y = 0$: $f(x,0) = x^4 - 2x^2 + 2 = (x^2-1)^2 + 1 \geq 1$. Su $x = 0$: simmetrico. Minimo locale.

3 Teorema delle Funzioni Implicite

Insieme di livello

Dato $f(x,y)$, l'insieme $Z(f) = \{(x,y) : f(x,y) = 0\}$ è una curva regolare locale se $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$.

Parametrizzabilità locale

Se $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, esiste $y = g(x)$ locale con $f(x, g(x)) = 0$.
Se $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$, esiste $x = h(y)$ locale con $f(h(y), y) = 0$.

Connettività per archi

Per provare che $Z(f)$ è connesso per archi:

- Verifica intersezioni con assi
- Usa argomento di continuità: se f cambia segno, deve attraversare $Z(f)$
- Sfrutta simmetrie e dominio

$f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

$Z(f) =$ circonferenza unitaria. $\nabla f = (2x, 2y) \neq (0,0)$ su $Z(f)$.
Parametrizzabile localmente ovunque tranne in $(\pm 1, 0)$ per $y = g(x)$ e in $(0, \pm 1)$ per $x = h(y)$.
Connessione: curva chiusa continua.

4 Integrali Doppi e Coordinate Polari

Coordinate polari

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad r \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Jacobiano: $\mathcal{J} = r \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$

Passaggio a polari

1. Identifica il dominio: disco, corona, settore?
2. Trova limiti per r: da r_{min} a r_{max} (funzioni di θ)
3. Trova limiti per θ: da θ_1 a θ_2
4. Sostituisci $f(x, y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$
5. Integra: $\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_{\text{min}}}^{r_{\text{max}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) \cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$

Disco $x^2 + y^2 \leq R^2$

$$\iint_{x^2+y^2\leq R^2} (x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 2\pi \int_0^R r^3\mathrm{d}r = 2\pi\frac{R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{2}$$

Corona $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, $y \geq 0$

Dominio: $r \in [1, 2]$, $\theta \in [0, \pi]$

$$\iint_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^\pi \int_1^2 r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \pi \int_1^2 r\mathrm{d}r = \pi \left[\frac{r^2}{2}\right]_1^2 = \frac{3\pi}{2}$$

Trasformazione coordinate: da cartesiane a polari

Problema: Calcolare $\iint_D e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ dove $D = \{x^2 + y^2 \leq 4\}$
In cartesiane: integrale difficile!
In polari: $x^2 + y^2 = r^2$, quindi:

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \int_0^2 e^{-r^2} \cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$= 2\pi \int_0^2 re^{-r^2}\mathrm{d}r = 2\pi \left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^2 = \pi(1 - e^{-4})$$

4.1 Calcoli pratici con integrali doppi

Volume, Baricentro, Momenti

Area/Volume 2D:

$$A = \iint_D 1\mathrm{d}A$$

Baricentro $(\bar{x}, \bar{y})$:

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \iint_D x\mathrm{d}A, \quad \bar{y} = \frac{1}{A} \iint_D y\mathrm{d}A$$

Momenti di inerzia:

$$I_x = \iint_D y^2\rho(x, y)\mathrm{d}A \quad \text{(rispetto asse } x\text{)}$$
$$I_y = \iint_D x^2\rho(x, y)\mathrm{d}A \quad \text{(rispetto asse } y\text{)}$$
$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\rho(x, y)\mathrm{d}A \quad \text{(rispetto origine)}$$

Se densità uniforme: $\rho = 1$.

5 Integrali Tripli: Cilindriche e Sferiche

5.1 Coordinate cilindriche

Cilindriche

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad \rho \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad z \in \mathbb{R}$$

Jacobiano: $\mathcal{J} = \rho \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$
Quando usare: cilindri, coni, paraboloidi di rivoluzione attorno a z.

5.2 Coordinate sferiche

Sferiche

$$\begin{cases} x = r\sin\phi\cos\theta \\ y = r\sin\phi\sin\theta \\ z = r\cos\phi \end{cases}$$

$$r \geq 0, \quad \phi \in [0, \pi], \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Jacobiano: $\mathcal{J} = r^2\sin\phi \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = r^2\sin\phi\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta$
Quando usare: sfere, coni centrati nell'origine.

Solido: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ con $0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$

Interpretazione: sfera unitaria sopra il cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
Intersezione: $z^2 + z^2 = 1 \Rightarrow z = \frac{1}{\sqrt{2}}$, quindi $r = \sqrt{2}z$.
In sferiche: Cono $z = r\cos\phi = \sqrt{x^2 + y^2} = r\sin\phi$

$$\Rightarrow \tan\phi = 1 \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{4}$$

Limiti: $r \in [0, 1]$, $\phi \in [0, \pi/4]$, $\theta \in [0, 2\pi]$.
Volume:

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^1 r^2\sin\phi\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta = 2\pi\int_0^{\pi/4}\sin\phi\mathrm{d}\phi\int_0^1 r^2\mathrm{d}r$$
$$= 2\pi\left[-\cos\phi\right]_0^{\pi/4}\cdot\frac{1}{3} = 2\pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{3} = \frac{2\pi}{3}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Baricentro: Per simmetria, $\bar{x} = \bar{y} = 0$.

$$\bar{z} = \frac{1}{V}\iiint_D z\mathrm{d}V = \frac{1}{V}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^1 (r\cos\phi)r^2\sin\phi\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{2\pi}{V}\int_0^{\pi/4}\cos\phi\sin\phi\mathrm{d}\phi\int_0^1 r^3\mathrm{d}r = \frac{2\pi}{V}\cdot\frac{1}{2}\left[\sin^2\phi\right]_0^{\pi/4}\cdot\frac{1}{4}$$
$$= \frac{\pi}{4V}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\pi}{8V}$$

Con $V = \frac{2\pi}{3}(1 - \sqrt{2}/2)$, si ricava $\bar{z}$ numericamente.

5.3 Calcoli pratici con integrali tripli

Volume, Baricentro, Momenti di Inerzia 3D

Volume:

$$V = \iiint_D 1\mathrm{d}V$$

Massa (densità ρ):

$$M = \iiint_D \rho(x, y, z)\mathrm{d}V$$

Baricentro $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$:

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iiint_D x\rho\mathrm{d}V, \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \iiint_D y\rho\mathrm{d}V, \quad \bar{z} = \frac{1}{M} \iiint_D z\rho\mathrm{d}V$$

Momenti di inerzia:

$$I_x = \iiint_D (y^2 + z^2)\rho\mathrm{d}V \quad \text{(asse } x\text{)}$$
$$I_y = \iiint_D (x^2 + z^2)\rho\mathrm{d}V \quad \text{(asse } y\text{)}$$
$$I_z = \iiint_D (x^2 + y^2)\rho\mathrm{d}V \quad \text{(asse } z\text{)}$$

Simmetrie: Se D e ρ sono simmetrici rispetto a un piano, la coordinata del baricentro perpendicolare a quel piano è zero.

Volume sfera con coordinate sferiche

Problema: Volume di $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$
In sferiche: $r \in [0, R]$, $\phi \in [0, \pi]$, $\theta \in [0, 2\pi]$

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R} r^2 \sin\phi \mathrm{d}r\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta = 2\pi \int_0^{\pi} \sin\phi\mathrm{d}\phi \int_0^{R} r^2\mathrm{d}r$$
$$= 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{4\pi R^3}{3}$$

6 Integrali Impropri

Definizioni

All'infinito: $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
Singolarità in c: $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to0^+} \int_a^{c-\epsilon} f(x)\mathrm{d}x$

Criteri di convergenza

Confronto: Se $0 \leq f(x) \leq g(x)$ e $\int g$ converge, allora $\int f$ converge.
Confronto asintotico: Se $f(x) \sim g(x)$ per $x \to +\infty$ (o $x \to c$), allora $\int f$ e $\int g$ hanno lo stesso carattere.
Integrale-p:

- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ converge se $p > 1$
- $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ converge se $\alpha < 1$

Integrali classici

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{+\infty} = 1 \quad \text{(converge)}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \ln b = +\infty \quad \text{(diverge)}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \left[2\sqrt{x}\right]_0^1 = 2 \quad \text{(converge)}$$

7 Integrali Curvilinei e Campi Vettoriali

7.1 Integrale di prima specie

I tipo: $\int_C f\mathrm{d}s$ (lunghezza e massa)

Data parametrizzazione $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ con $t \in [a, b]$:

$$\int_C f\mathrm{d}s = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\|\mathbf{r}'(t)\|\mathrm{d}t$$

dove $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$.
Lunghezza curva: $L = \int_C 1\mathrm{d}s = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|\mathrm{d}t$
Massa con densità ρ: $M = \int_C \rho\mathrm{d}s$
Baricentro: $\bar{x} = \frac{1}{M}\int_C x\rho\mathrm{d}s$, $\bar{y} = \frac{1}{M}\int_C y\rho\mathrm{d}s$

7.2 Integrale di seconda specie (lavoro)

II tipo: $\int_C \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}$ (lavoro di un campo)

Campo $\mathbf{F} = (P, Q)$:

$$\int_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\mathrm{d}t$$

$$= \int_a^b [P(x(t), y(t))\cdot x'(t) + Q(x(t), y(t))\cdot y'(t)]\mathrm{d}t$$

Interpretazione fisica: lavoro compiuto dal campo $\mathbf{F}$ lungo la curva C.
Proprietà:

- Dipende dall'orientazione: $\int_{-C} = -\int_C$
- Additività: $\int_{C_1\cup C_2} = \int_{C_1} + \int_{C_2}$

7.3 Campi conservativi

Campo conservativo e potenziale

$\mathbf{F} = (P, Q)$ è **conservativo** se $\exists U$ tale che $\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}\right)$.
Condizione necessaria (rotore nullo):

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Condizione sufficiente: dominio **semplicemente connesso** + rotore nullo.
Teorema fondamentale: Se $\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} U$:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = U(B) - U(A)$$

dove A e B sono inizio e fine di C (indipendente dal cammino!).
Circuitazione nulla: $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0$ per ogni curva chiusa.

Trovare il potenziale U

Dato $\mathbf{F} = (P, Q)$ conservativo:

1. Integra P rispetto a x: $U(x, y) = \int P(x, y)\mathrm{d}x + g(y)$
2. Deriva rispetto a y: $\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y)$
3. Confronta e trova $g(y)$
4. Scrivi $U(x, y)$

Alternativa: integra Q rispetto a y e deriva rispetto a x.

Campo $\mathbf{F} = (2xy + y^2, x^2 + 2xy)$

Verifica conservatività:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x + 2y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x + 2y \quad \checkmark$$

Trova potenziale:

$$U = \int (2xy + y^2)\mathrm{d}x = x^2 y + xy^2 + g(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^2 + 2xy + g'(y) = x^2 + 2xy$$

$$\Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = C$$

Potenziale: $U(x, y) = x^2 y + xy^2 + C$
Lavoro da $(0, 0)$ a $(1, 1)$:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = U(1, 1) - U(0, 0) = (1 + 1) - 0 = 2$$

7.4 Teorema di Green

Teorema di Green (piano)

Sia C curva chiusa semplice orientata **positivamente** (antioraria) che racchiude dominio regolare D:

$$\oint_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Forma vettoriale:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_D (\mathrm{rot}\,\mathbf{F})\mathrm{d}A$$

dove $\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ è la componente z del rotore.
Applicazione per l'area:

$$\mathrm{Area}(D) = \oint_C x\mathrm{d}y = -\oint_C y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\oint_C (x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x)$$

Circonferenza $x^2 + y^2 = 1$

Parametrizzazione: $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
Campo $\mathbf{F} = (-y, x)$:

$$\int_C -y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} (-\sin t)(-\sin t) + (\cos t)(\cos t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 1\mathrm{d}t = 2\pi$$

Verifica con Green: $\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y} = 1 - (-1) = 2$

$$\iint_D 2\mathrm{d}A = 2 \cdot \pi \cdot 1^2 = 2\pi \quad \checkmark$$

8 Superfici e Flussi

Flusso attraverso superficie

Data superficie S parametrizzata da $\mathbf{r}(u, v)$ e campo $\mathbf{F}$:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

dove $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|}$ è la normale.

Teorema della divergenza (Gauss)

Sia V solido con superficie S orientata verso l'esterno:

$$\iiint_V \mathrm{div}\,\mathbf{F}\mathrm{d}V = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

dove $\mathrm{div}\,\mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$.

Teorema di Stokes

Sia S superficie con bordo $\partial S = C$:

$$\iint_S (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

dove $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}$.

Check-list flussi

1. Identifica superficie: grafico? parametrizzazione?
2. Calcola normale: prodotto vettoriale $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$
3. Verifica orientamento (verso esterno o dato)
4. Scegli: calcolo diretto o teorema (Gauss/Stokes)?
5. Integra

9 Equazioni Differenziali Ordinarie

9.1 Variabili separabili

Forma generale

$$y' = g(x) \cdot h(y)$$

Soluzione ottenuta separando variabili:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = \int g(x)\mathrm{d}x + C$$

Strategia di risoluzione

Passi:

1. **Trova equilibri:** risolvi $h(y) = 0$ (sono soluzioni costanti)
2. **Separa variabili:** $\frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = g(x)\mathrm{d}x$
3. **Integra entrambi i membri**
4. **Applica condizione iniziale** $y(x_0) = y_0$
5. **Esplicita** $y(x)$ se possibile

Tecniche di integrazione

Frazioni parziali:

$$\frac{1}{(y+a)(y+b)} = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{y+a} - \frac{1}{y+b}\right)$$

Frazioni con tre fattori:

$$\frac{1}{y(y-1)(y-2)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y-1} + \frac{C}{y-2}$$

Sostituzione utile: Se compare $y^2 + 1$, considera $y = \tan\theta$.

$y' = (x-1)(y^2-y-2)$, $y(0) = 0$

1. **Equilibri:** $y^2 - y - 2 = (y+1)(y-2) = 0 \Rightarrow y = -1$, $y = 2$
2. **Separazione:** $\frac{\mathrm{d}y}{(y+1)(y-2)} = (x-1)\mathrm{d}x$
3. **Frazioni parziali:**
$$\frac{1}{(y+1)(y-2)} = \frac{1}{-3}\left(\frac{1}{y+1} - \frac{1}{y-2}\right)$$
4. **Integrazione:**
$$-\frac{1}{3}(\ln|y+1| - \ln|y-2|) = \frac{(x-1)^2}{2} + C$$
$$\ln\left|\frac{y-2}{y+1}\right| = -\frac{3(x-1)^2}{2} + C_1$$
5. **Condizione iniziale** $y(0) = 0$:
$$\ln\left|\frac{-2}{1}\right| = -\frac{3}{2} + C_1 \Rightarrow C_1 = \ln 2 + \frac{3}{2}$$
6. **Soluzione esplicita:**
$$\frac{y-2}{y+1} = \pm e^{-\frac{3(x-1)^2}{2} + C_1}$$

9.2 Equazioni lineari del primo ordine

Forma standard

$$y' + a(x)y = b(x)$$

Soluzione generale:

$$y(x) = e^{-A(x)}\left[\int b(x)e^{A(x)}\mathrm{d}x + C\right]$$

dove $A(x) = \int a(x)\mathrm{d}x$ è una primitiva di $a(x)$.

Fattore integrante

1. Calcola $\mu(x) = e^{\int a(x)\mathrm{d}x}$
2. Moltiplica l'equazione per $\mu(x)$
3. Ottieni $(\mu(x)y)' = \mu(x)b(x)$
4. Integra: $\mu(x)y = \int \mu(x)b(x)\mathrm{d}x + C$
5. Dividi per $\mu(x)$ per ottenere $y(x)$

$y' - 2y = e^{3x}$, $y(0) = 1$

Fattore integrante: $\mu(x) = e^{-\int 2\mathrm{d}x} = e^{-2x}$
Moltiplica: $e^{-2x}y' - 2e^{-2x}y = e^x$
$$(e^{-2x}y)' = e^x$$
Integra: $e^{-2x}y = e^x + C$
Soluzione generale: $y(x) = e^{3x} + Ce^{2x}$
Condizione iniziale: $1 = 1 + C \Rightarrow C = 0$
Soluzione: $y(x) = e^{3x}$

9.3 Equazioni del secondo ordine a coefficienti costanti

Equazione omogenea

$$y'' + ay' + by = 0$$

Equazione caratteristica: $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$
Discriminante: $\Delta = a^2 - 4b$
Soluzioni:

- $\Delta > 0$: due radici reali λ_1, λ_2
$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$
- $\Delta = 0$: radice doppia λ
$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda x}$$
- $\Delta < 0$: radici complesse $\lambda = \alpha \pm i\beta$

$$y(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))$$

$y'' - 3y' + 2y = 0$

Equazione caratteristica: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$
Radici: $(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$
Soluzione generale: $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$

$y'' + 2y' + 2y = 0$

Equazione caratteristica: $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$
Radici complesse: $\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i$
Quindi $\alpha = -1,\ \beta = 1$
Soluzione generale: $y(x) = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$

9.4 Equazioni non omogenee: metodo della variazione delle costanti

Equazione completa

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

Soluzione generale: $y(x) = y_0(x) + y_p(x)$

- $y_0(x)$: soluzione omogenea
- $y_p(x)$: soluzione particolare

Metodo dei coefficienti indeterminati

Se $f(x)$ ha una delle seguenti forme, cerca y_p con forma simile:

Termine noto	**Forma di y_p**
$P_n(x)$ (polinomio grado n)	$Q_n(x)$ (polinomio grado n)
$e^{\alpha x}$	$Ae^{\alpha x}$
$\cos(\beta x)$ o $\sin(\beta x)$	$A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)$
$e^{\alpha x}\cos(\beta x)$	$e^{\alpha x}(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x))$

Attenzione: Se y_p è già soluzione dell'omogenea, moltiplica per x (o x^2 se radice doppia).

$y'' - 3y' + 2y = e^x$

Soluzione omogenea: $y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$
Soluzione particolare: Poiché e^x è già nell'omogenea, prova $y_p = Axe^x$

$$y_p' = Ae^x + Axe^x, \quad y_p'' = 2Ae^x + Axe^x$$

Sostituisci:

$$(2A + Ax)e^x - 3(A + Ax)e^x + 2Axe^x = e^x$$

$$(2A - 3A)e^x = e^x \Rightarrow -A = 1 \Rightarrow A = -1$$

Soluzione generale: $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - xe^x$

9.5 Stabilità degli equilibri

Analisi qualitativa per $y' = f(y)$

Equilibrio: y_0 tale che $f(y_0) = 0$
Stabilità:

- **Stabile:** se $f'(y_0) < 0$ (le soluzioni vicine convergono)
- **Instabile:** se $f'(y_0) > 0$ (le soluzioni vicine divergono)
- **Semi-stabile:** se $f'(y_0) = 0$ (analisi più approfondita necessaria)

Studio del campo di fase

1. Trova tutti gli equilibri: $f(y) = 0$
2. Analizza il segno di $f(y)$ tra gli equilibri
3. $f(y) > 0$: soluzioni crescenti ($y' > 0$)
4. $f(y) < 0$: soluzioni decrescenti ($y' < 0$)
5. Disegna le frecce del campo di fase
6. Determina stabilità di ogni equilibrio

$y' = y(1 - y)(y - 2)$

Equilibri: $y = 0$, $y = 1$, $y = 2$
Studio del segno:

- $y < 0$: $f(y) = (-)(+)(-) = (+) \Rightarrow y$ **cresce**
- $0 < y < 1$: $f(y) = (+)(+)(-) = (-) \Rightarrow y$ **decresce**
- $1 < y < 2$: $f(y) = (+)(-)(-) = (+) \Rightarrow y$ **cresce**
- $y > 2$: $f(y) = (+)(-)(+) = (-) \Rightarrow y$ **decresce**

Stabilità:

- $y = 0$: **instabile** (cresce da sotto, decresce da sopra)
- $y = 1$: **stabile** (decresce da sotto, cresce da sopra)
- $y = 2$: **instabile** (cresce da sotto, decresce da sopra)

9.6 Equazioni di Bernoulli

Forma di Bernoulli

$$y' + a(x)y = b(x)y^n \quad (n \neq 0, 1)$$

Sostituzione: $z = y^{1-n}$
Equazione trasformata (lineare):

$$z' + (1-n)a(x)z = (1-n)b(x)$$

$y' + \frac{y}{x} = xy^2$

Identificazione: $n = 2$, quindi sostituisci $z = y^{-1} = \frac{1}{y}$
Derivata: $z' = -\frac{y'}{y^2}$, quindi $y' = -y^2 z'$
Sostituisci: $-y^2 z' + \frac{y}{x} = xy^2$
Dividi per $-y^2$: $z' - \frac{1}{xy} = -x$
Con $z = \frac{1}{y}$: $z' - \frac{z}{x} = -x$
Equazione lineare! Risolvi con fattore integrante $\mu = e^{-\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}$

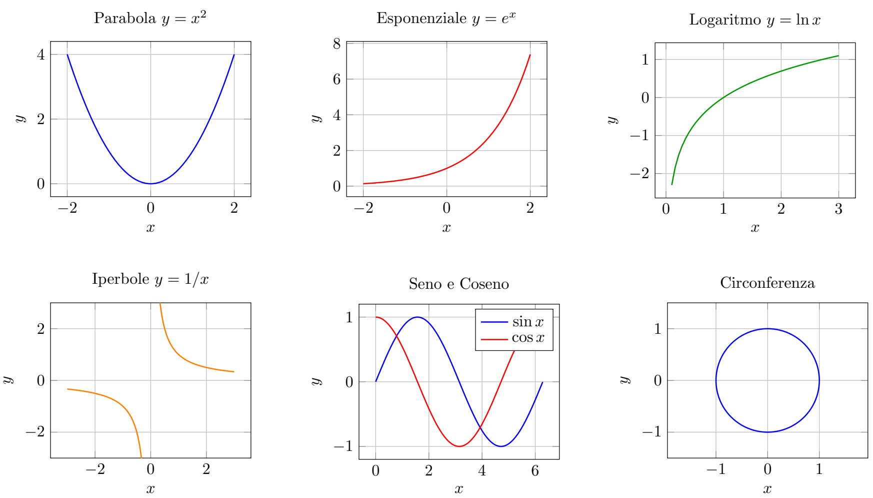
9.7 Formule utili per equazioni differenziali

Integrali utili

$$\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \ln|y| + C$$
$$\int \frac{1}{a^2+y^2}\mathrm{d}y = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{y}{a}\right) + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-y^2}}\mathrm{d}y = \arcsin\left(\frac{y}{a}\right) + C$$
$$\int e^{ay}\mathrm{d}y = \frac{1}{a}e^{ay} + C$$
$$\int \frac{1}{y^2-a^2}\mathrm{d}y = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{y-a}{y+a}\right| + C$$

10 Grafici Essenziali

10.1 Funzioni standard

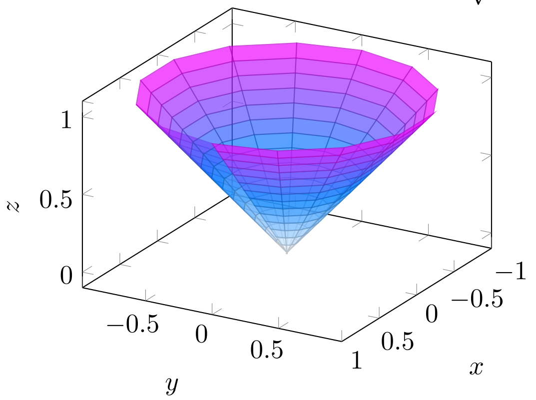


10.2 Superfici 3D: Equazioni e Grafici

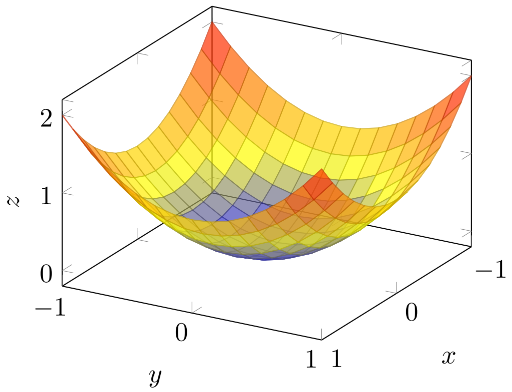
Equazioni tipiche

- **Cono:** $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ oppure $z^2 = x^2 + y^2$
- **Sfera:** $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$
- **Paraboloide:** $z = x^2 + y^2$ (ellittico) o $z = x^2 - y^2$ (iperbolico)
- **Cilindro:** $x^2 + y^2 = R^2$ (esteso in z)

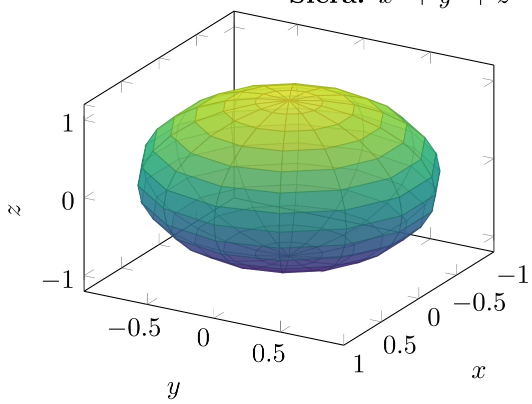
Cono: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$



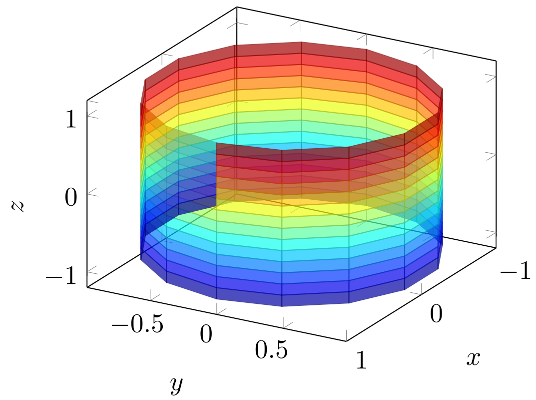
Paraboloide: $z = x^2 + y^2$



Sfera: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$



Cilindro: $x^2 + y^2 = 1$



1
0
−1
z
−0.5
0
0.5
1
y
−1
0
x

11 Checklist d'Esame Analisi 2

Checklist Completa

Serie di funzioni:

☐ Trovato insieme di convergenza puntuale

☐ Controllato convergenza uniforme (M-test, Cauchy)

☐ Verificate condizioni per derivazione/integrazione termine a termine

Funzioni di più variabili:

☐ Calcolato gradiente e punti critici

☐ Calcolata Hessiana e determinante

☐ Classificato punti (min/max/sella) o usato metodo alternative se inconclusivo

Funzioni implicite:

☐ Verificato $\nabla f \neq 0$ sui punti di livello

☐ Controllato $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ o $\frac{\partial f}{\partial x} \neq 0$ per parametrizzazione

☐ Argomentato connettività se richiesta

Integrali doppi/tripli:

☐ Disegnato dominio e identificato simmetrie

☐ Scelto coordinate appropriate (polari/cilindriche/sferiche)

☐ Calcolato Jacobiano corretto

☐ Determinato limiti di integrazione corretti

☐ Sfruttato simmetrie per baricentri

Integrali impropri:

☐ Identificato tipo (infinito o singolarità)

☐ Applicato criterio di confronto o asintotico

☐ Verificato convergenza/divergenza

Integrali curvilinei e campi:

☐ Parametrizzato curva correttamente

☐ Controllato se campo conservativo (rotore, potenziale)

☐ Applicato Green/Gauss/Stokes se conveniente

Equazioni differenziali:

☐ Identificato equilibri

☐ Separato variabili e integrato

☐ Usato frazioni parziali se necessario

☐ Applicato condizione iniziale

☐ Analizzato stabilità se richiesto

Buono studio e in bocca al lupo per l'esame!